Was ist und was soll uns das Lambdoma?

Dieter Flury

ZUSAMMENFASSUNG **Das Lambdoma ordnet alle Rationalen Zahlen zwischen null und eins, also alle Verhältnisse natürlicher (Maß-)zahlen k und n (k≤n), in ein nach unten offenes gleichschenkliges Dreieck. Man beginnt mit 1 an der Spitze. In die zweite Zeile schreibt man ½ und 1. In die dritte Zeile kommt ⅓, ⅔, 1. Die n-te Zeile besteht aus den Zahlen 1/n, ..., (n-1)/n, 1. In der n-ten Zeile stehen n Zahlen. Die wichtigste Erkenntnis ist, dass jeder Punkt des Lambomas als ein Intervall der Partialtonreihe klingt. k/n ist das Intervall zwischen dem k-ten und dem n-ten Partialton. Unser Ohr nimmt die Intervalle der Partialtonreihe als besonders harmonisch war (im Englischen werden die Partialtöne als „harmonics" bezeichnet). Da 2k/2n ebenso wie 3k/3n u.s.f.gleich klingen wie k/n, liegen alle Punkte eines bestimmten Intervalles auf einer Geraden. Alle diese Geraden schneiden sich außerhalb des Lambdomas in einem rätselhaften Punkt Ω. Richten wir unseren Blick auf das Strahlenbündel durch den Punkt Ω, rechts begrenzt durch die Gerade durch den rechten Schenkel des Lambdomas (die noch zum Bündel gehören soll) und links begrenzt von der Parallelen zum linken Schenkel (die nicht mehr zum Bündel gehört). Der Öffnungswinkel des Strahlenbündels entspricht dem Winkel an der Spitze des Lambdomas. Die meisten Strahlen des Bündels durchdringen das Lambdoma, ohne auf einen Lambdomapunkt zu stoßen. Sie entsprechen den Irrationalen Zahlen des links offenen Intervalls]0,...,1]. Eine verschwindende Minderheit abzählbar unendlicher Mächtigkeit entspricht den Rationalen Zahlen des links offenen Intervalls]0,...,1].**

Von besonderem Interesse ist der Bereich zwischen der Vertikalen durch ½ (Oktavgerade) und dem Rechten Schenkel (Prim). In diesem Bereich liegen alle natürlichen Intervalle des Oktavraumes.

Was wir hier im Vokabular der Mathematik der Neuzeit beschrieben haben, entwickeln wir im Folgenden, indem wir uns immer wieder Rechenschaft darüber ablegen, welche mathematischen Mittel den Pythagoräern bereits zur Verfügung standen. Die kursiv gedruckten Einschübe kann man getrost überspringen, sie erläutern zumeist mathematische Hintergründe für ein vertieftes Verständnis.

Um das Lambdoma zu verstehen, vergegenwärtige man sich den Begriff der Proportion. Schön bedeutet wohlproportioniert, das Kleinere steht zum Größeren in einem guten und schönen Verhältnis. Wir denken hier nicht (oder nur am Rande) an Sozialpolitik und Verteilungsgerechtigkeit, sondern an das griechische Adjektiv καλοσκαγαθος, in dem das Gute und das Schöne enthalten sind und in welchem sich Ethik und Ästhetik finden.

Zweierlei vermag die Zahl: die Natürliche Zahl kann eine Größe ausdrücken. Und die Rationale Zahl kann ein Zahlenverhältnis ausdrücken, eine Proportion, für uns Moderne den Quotienten aus zwei Maßzahlen, für Johannes Kepler und seine geistigen Väter ein musikalisches Intervall. **Jede Proportion klingt als Intervall**.

Man wird wohl Johannes Scotus (Eriugena) als einen wichtigen dieser geistigen Väter Keplers ansehen dürfen. Er lehrt zum Quadrivium, im Einzelnen zur Arithmetik, dass die Zahl von der Einheit (Monas) ausgehe und zu ihr zurückkehre, zur Geometrie, dass sie vom Punkt ausgehe und zu diesem zurückkehre, zur Musik, dass sie vom Ton ausgehe und zu diesem zurückkehre und schließlich zur Astronomie, sie gehe vom Atom aus und kehre zum Atom zurück.

Die Einzelgröße und die Proportion liegen laut van der Waerden dem Quadrivium zugrunde, den vier fortgeschrittenen Freien Künsten: Geometrie als Einzelgröße im Materiellen (Erdvermessung) und Arithmetik als Einzelgröße im Geistigen (Zahlbegriff), Astronomie als Proportion im Materiellen (Bahnachsen, Umlaufzeiten der Himmelskörper) und Musik als Proportion im Geistigen (Intervalle, klingende Zahlenverhältnisse).

Um das Lambdoma zu verstehen, halten wir es für wichtig, uns den Stand des mathematischen Denkens der Pythagoräer (und damit der Alten Ägypter) vor Augen (und vor Ohren) zu halten. Wir sind heute gewohnt, die Natürlichen Zahlen von einer Eins weg, zu denken, an welche wir eine zweite Eins anhängen und dann immer wieder eine weitere, so wie es Peano gegen Ende des 19.Jahrhunderts in großer Klarheit dargestellt hat.

Dem steht im antiken und mittelalterlichen Denken eine gänzlich andere Herleitung der Natürlichen Zahlen gegenüber. In diesem Denken spielt die erste Eins als Einheit eine singuläre Rolle. Sie wird nicht „kopiert und angehängt", die (göttliche) Einheit kann es nur einmal geben, alles andere wäre blasphemisch. Vielmehr entsteht alles aus der Teilung der Einheit. Die Zwei ist damit, um mit Heraklit zu sprechen, die En-anti-otes, der Gegensatz und Widerstreit zweier Teile der Einheit. Leider wird in Heraklits berühmtestem Satz, dieser Gegensatz sei Vater aller Dinge, „Polemos" als „Krieg" übersetzt, als ob für Heraklit sich gegenseitig abzuschlachten Vater aller Dinge gewesen wäre. *In heutiger Diktion lautet eine mögliche Übersetzung: das Binärsystem (Digitalisierung) ist Vater aller Dinge.*

Teilungen der Einheit, hörbar als Saitenteilungen, sind der angemessene Zugang zu den Natürlichen Zahlen, wenn wir das Lambdoma verstehen wollen.

Ob uns ein griechischer Tempel in der Proportion 8:13 oder 13:8 erscheint, ändert nichts an seinem Aussehen. Die Terz 5:4 klingt genau wie die Terz 4:5. Mehr noch: Stehen die Schwingungszahlen eines Intervalls im Verhältnis 13:8, verhalten sich die Saitenlängen (Rohrlängen), physikalisch gesprochen die Wellenlängen im Verhältnis 8:13, denn das Produkt von Wellenlänge und Schwingungszahl entspricht der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle, genau das bedeutet die Grundgleichung der Wellentheorie.

Für das Folgende bewegen wir uns kurz in der modernen Mathematik: Auf den positiven Reellen Zahlen hat die Kehrwertfunktion $f(x):=1/x$ bemerkenswerte Eigenschaften, an die wir so sehr gewöhnt sind, dass sie uns gar nicht mehr auffallen. Es gilt für alle positiven Reellen Zahlen x, dass $f(f(x))=x$ und dass $f(x*y)=f(x)*f(y)$, also insbesondere $f(1)=1$. Die Funktion f bildet die Menge der positiven Rationalen Zahlen als Teilmenge der Reellen Zahlen betrachtet in und auf sich ab. Außerdem ist f(x) streng monoton fallend, das bedeutet: $x<y$ gilt genau dann, wenn $f(y)<f(x)$. Ausgehend von zwei positiven Reellen Zahlen x,y ist das Arithmetische Mittel der beiden Kehrwerte gleich dem Kehrwert ihres Harmonischen Mittelwertes und der Kehrwert des Harmonischen Mittels wiederum das Arithmetische Mittel der Kehrwerte. Mathematisch gesprochen: die Funktion $f(x):=1/x$ vermittelt eine Bijektion zwischen dem links offenen Intervall $]0,1]$ und dem rechts offenen Intervall $[1,\ldots[$. Alle oben genannten Eigenschaften des Kehrwertes f gelten. Dazu kommt, dass für das Arithmetische Mittel A(x,y) und das Harmonische Mittel H(x,y) gilt:

$$f(A(x,y) = H(f(x),f(y)) \text{ und } f(H(x,y) = A(f(x),f(y))$$ *(siehe Abschnitt Mittelwerte)*

Der Kehrwert f vermittelt somit eine mit der Multiplikation verträgliche, die Ordnung umkehrende Bijektion zwischen $]0,1]$ und $[1,\ldots[$, bei welcher – salopp gesprochen - das Arithmetische Mittel zum Harmonischen und das Harmonische zum Arithmetischen wird. Exakter ausgedrückt: wenn von zwei Intervallen ausgehend ein drittes als Schwingungsverhältnis das Arithmetische (bzw.Harmonische) Mittel der beiden Schwingungsverhältnisse hat, so ist das Verhältnis der Wellenlängen des dritten das Harmonische (bzw.Arithmetische) Mittel der beiden anderen.

All das gilt genauso, wenn wir f(x) statt auf den Reellen auf den positiven Rationalen Zahlen betrachten.

Nochmals: Gehen wir von einem Verhältnis zu dessen Kehrwert über, ändert sich am Intervall nichts. Darauf werden wir gleich noch ausführlicher zu sprechen kommen.

Für uns Moderne ist das Verhältnis vom Kleineren zum Größeren, von minor zu maior, eine Reelle Zahl zwischen null und eins. Verhältnis Eins bedeutet, dass beide Seiten gleich groß sind. Dies ist der eine Grenzfall, von minor und maior kann dann eigentlich nicht mehr gesprochen werden, da beide gleich groß sind. Null auf der anderen Seite bedeutet, dass die minor gegen die maior verschwindend klein ist. *Wir müssten dabei von Reellen Zahlen sprechen, da allein schon die Quadratseite gemessen an der Diagonalen keine Rationale Zahl ist, geschweige denn der Kreisdurchmesser* *gemessen am Umfang. Wir lassen für den Moment die Irrationalen Zahlen beiseite und beschränken uns auf die Rationalen Zahlen. Denn lange galt 7/22 als Proportion zwischen Kreisdurchmesser zu Kreisumfang und die (rationalen) Verhältnisse der Fibonacci-Zahlen ergaben sehr schnell völlig ausreichende Annäherungen an die (irrationale) Proportion des Goldenen Schnittes.*

Rationale Zahlen sind für uns (Moderne) stets Quotienten aus einer Ganzen Zahl und einer Natürlichen Zahl. Das bedeutet: Der Zähler eines Bruches ist eine Zahl aus {....-3,-2,-1,0,1,2,3...} und der Nenner eine Zahl aus {1,2,3...}. Die Pythagoräer hingegen hatten sicher keine Null, sie hatten natürliche Zahlen und sie hatten deren Kehrwerte 1/n. Diese Kehrwerte 1/n stammen aus der Teilung der Einheit in n Teile, aus welcher für sie die Natürlichen Zahlen stammen (siehe „Die Natürlichen Zahlen und ihre Persönlichkeiten").

Die Rationalen Zahlen der Form 1/n nennen wir heute Stammbrüche. Quotienten wie beispielsweise 3/5 stellten sie folgendermaßen dar: 3 ist in 5 einmal enthalten, Rest 2. Im zweiten Schritt ist dieser Rest 2 in der minor 3 einmal enthalten, Rest 1. Diese 1 ist in 2 zweimal enthalten. In heutiger Schreibweise lautet dies

<0;1,1,2> = 0+ 1/(**1**+(1/(**1**+1/**2**)) = 3/5

Rationale Zahlen in solchen Kettenbrüchen darzustellen, somit als eine Schachtelung von Stammbrüchen, kommt uns heute sehr umständlich vor. Wenn wir aber auf dem Lambdoma musizieren, sollten wir die „Originalinstrumente" im Hinterkopf haben. Dazu kommt, dass Rationale Zahlen als Kettenbrüche zu schreiben einzelne Vorteile bietet, die wir in der uns vertrauten Schreibweise einer Rationalen Zahl als Quotient oder gar als Dezimalbruch nicht genießen. (Siehe „Kettenbrüche"). Insbesondere hat beispielsweise 3/5=<0;1,1,2> den Kehrwert 5/3= <1;1,2>. Allgemein gilt für die Kehrwertfunktion f(x)

f(<0;a,b,...,c>) = <a;b,...,c> und <0;a,b,...,c> =f(<a;b,...,c>)

Für das Zahlenpaar (minor; maior) verwenden wir das Wort Verhältnis. Für das gekürzte Paar (wenn also minor und maior teilerfremd sind) verwenden wir das Wort Proportion.

Das Lambdoma ist eine Anordnung aller „echten" Brüche, also aller (positiven) Brüche, deren Zähler den Nenner nicht übersteigt. Zwei Fehler in der Literatur zum Lambdoma sollten wir vermeiden: Erstens kann die Null nicht vorkommen, die gab es zu Zeiten der Pythagoräer sicher nicht. Zweitens kann das Lambdoma nicht über die Echten Brüche hinausgehen, es hat sich – in heutiger Diktion – auf das links offene Intervall]0,1] der Rationalen Zahlen zu beschränken.

Bei den Proportionen, also dem Verhältnis einer Minor gemessen an einer Maior, geht es um Echte Brüche. Unsere Rationalen Zahlen können bekanntlich beliebig groß werden, doch ist eine (positive) Rationale Zahl größer als eins, so ist ihr Kehrwert ein Echter Bruch. Statt Maior:Minor betrachten wir dann eben Minor:Maior. Wir messen immer die Minor an der Maior, indem wir fragen, wie oft die Minor in der Maior enthalten ist.

Wer mit der Geometrie der Ebene vertraut ist, möge sich die Ganzen Zahlen auf einer Geraden durch Null vorstellen mitsamt dem Einheitskreis um Null. Zu jeder Natürlichen Zahl n konstruieren wir den Punkt 1/n, indem wir über der Strecke 0 bis n einen Halbkreis (Thaleskreis) schlagen und von dessen Schnittpunkt mit dem Einheitskreis das Lot auf die Gerade schlagen. Diese Konstruktion funktioniert für jeden Punkt auf der Geraden außerhalb des Einheitskreises und macht die Bijektion x→1/x anschaulich. Damit ist jeder Proportion ein Punkt auf dem Viertelkreis von (1,0) (inklusive) bis (0;1) exklusive zugeordnet. Es ist jener Punkt, in welchem das Lot auf der Stelle p/q schneidet und gleichzeitig der Punkt der Tangente an den Einheitskreis durch q/p>1. Wir finden aber die weiter unten entwickelte logarithmische Abbildung der Intervalle des Oktavraums auf den Einheitskreis interessanter, da sie unserem Höreindruck entspricht.

So ist das Lambdoma eine Anordnung aller positiven Rationalen Zahlen bis zum Wert eins – aller Verhältnisse einer kleineren zu einer größeren Maßzahl – zunächst als Paare Natürlicher Zahlen (Verhältnisse). Das Lambdoma entsteht folgendermaßen (Skizze siehe unten):

An der Spitze des Lambdomas steht, wie könnte es anders sein, die Eins. In der zweiten Zeile steht links 1/2 und rechts 2/2, also eins. In der folgenden Zeile stehen 1/3, rechts davon 2/3 und rechts davon 3/3, also wieder die Eins.

1

1/2 1

1/3 2/3 1

1/4 1/2 3/4 1

1/5 2/5 3/5 4/5 1

usf.

Die n-te Zeile besteht aus den Zahlen 1/n, ..., (n-1)/n, 1. In der n-ten Zeile stehen n Zahlen. Am rechten Ende der n-ten Zeile steht immer 1 (=n/n).

Vertikal absteigend wachsen die Nenner schrittweise, horizontal stehen in der n-ten Zeile die Brüche 1/n, 2/n, ..., n/n.

In der n-ten Zeile hören wir somit die zum n-ten Partialton gehörigen Intervalle, nämlich von links nach rechts dessen Intervall zum Grundton (1:n), zum zweiten Partialton (2:n), zum dritten Partialton (3:n) und so weiter bis zum Intervall zwischen (n-1)sten und n-ten Intervall (n-1):1 sowie den Einklang n:n (Musiker nennen das die Prim).

Unterhalb von 1/2 treten auch 2/4, 3/6, 4/8,....auf, die alle die gleiche Rationale Zahl, die gleiche Proportion ausdrücken.

Die ethische und ästhetische Wichtigkeit der Proportion im Denken der Alten erklärt, mit welcher Andacht sie das Lambdoma betrachtet haben. Die Verhältnisse k/n und 2k/2n und 3k/3n und so weiter entsprechen alle der gleichen Proportion k:n. Sie liegen alle auf der Geraden durch k:n und 2k:2n. Je nach mathematischer Vorbildung erfüllt einen dies mit Andacht oder mit Achselzucken: ja eh! Wir folgen dem Weg der Andacht und bemerken mit weiterem Staunen, dass sich alle diese Geraden in einem rätselhaften Punkt links oberhalb der Spitze des Lamdomas treffen, ja eh, in einem Punkt, dem man aus lauter Andacht die Bezeichnung Omega verleihen möchte.

Ω

1

1/2 2/2

1/3 2/3 3/3

1/4 2/4 3/4 4/4

1/5 2/5 3/5 4/5 5/5

1/6 2/6 3/6 4/6 5/6 6/6

u.s.w

Unsere menschliche Hybris der Neuzeit verleitet uns dazu, außerhalb der Grenzen des Lambdomas parallel zum linken Schenkel eine Gerade durch (nicht unserer irdischen Wirklichkeit angehörende Punkte) 0/2, 0/3, 0/4, ... zu denken. Durchlaufen wir diese in der Richtung ...., 0/3, 0/2, 0/1, stoßen wir in Omega auf die Fortsetzung des rechten Schenkels 3/3, 2/2, 1/1..... Damit lokalisieren wir Omega auf dem nicht denkbaren Grenzwert 0/0, dem Schrecken aller frommen Mathematiker. Wir sprechen deshalb lieber von Omega Ω. Von Ω vertikal nach unten verläuft die Proportionsgerade ½. Links davon verlaufen die kleineren, (ungerechteren) Verhältnisse, rechts davon die ausgeglicheneren.

Warum ist die Vertikale, die Proportion 1:2 – die minor macht 1/3 des Ganzen aus und die maior 2/3 – so bemerkenswert? Diese Vertikale verläuft etwas links von der Spitze durch das Lambdoma. Wie alle Proportionen geht auch sie durch Ω.

Dafür müssen wir uns neuerlich vor Augen führen – oder besser: vor Ohren führen – wie weiland die Pythagoräer, dass Proportionen als Intervalle klingen. Die Schwingungszahl (Frequenz) des tieferen Tones (minor) zur Schwingungszahl des höheren Tones (maior) ist eine Proportionsgerade im Lambdoma.

Der rechte Schenkel ist der Einklang (die Prim), die Senkrechte durch 1:2 die Oktave, links davon überschreiten die Intervalle die Oktave, während auf der rechten Seite (auf nach links geneigten Geraden) alle harmonischen Intervalle innerhalb des Oktavraums zu finden sind.

Je größer ein Intervall ist, desto weiter links liegt seine Proportionsgerade.

Musiker projizieren große (den Oktavraum überschreitende) Intervalle gerne in den Oktavraum, indem sie den tieferen Ton so oft oktavieren, bis das Intervall in den Raum einer Oktave zu liegen kommt. Im Lambdoma bedeutet dies, für Brüche $k/n < ½$ jenen Bruch $2^r k/n$ ($r \in N$) zu suchen, für welchen

$1/2 \leq 2^r k/n < 1$ oder auch $n/2 \leq 2^r k < n$ oder auch

$\log_2(n/2) \leq r + \log_2(k) \leq \log_2(n)$

(Da der Zweierlogarithmus von n genau um eins größer ist als der Zweierlogarithmus von n/2, liegt zwischen den beiden Logarithmuswerten genau eine natürliche Zahl r). Eleganter formuliert findet sich dieser Gedankengang in meinem „Versuch, die Superposition von Intervallen im Oktavraum zu veranschaulichen in der Gauss'schen Ebene"

Sehr schön sichtbar ist im Lambdoma die Partialtonreihe, also die Reihe der Verhältnisse 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6,..... . Die Partialtonreihe liegt im Lambdoma auf einer parallelen Geraden zum rechten Schenkel. Auch dies entdecken wir mit gebührender Andacht, denn diese Gerade verläuft nach unten durch immer kleiner werdende Intervalle. Klarerweise verläuft sie nicht durch Ω, denn sie verbindet ja nicht gleiche Verhältniszahlen. Die ersten fünf Intervalle (sechs Töne) bilden den Durdreiklang. Der Grundton ist dreifach vertreten, der Quintton zweifach, der fünfte Ton ist die Reine Durterz.

Betrachten wir wieder das Strahlenbündel aller Proportionen durch Ω, welches wir uns auf der linken Seite begrenzt denken durch die Grenzgerade 0 außerhalb des Lambomas parallel zum linken Lambdomaschenkel. Rechts ist das Strahlenbündel begrenzt durch die Gerade der Proportion n:n. Zwischen diesen beiden Grenzgeraden findet man alle denkbaren Proportionen (Rationalen Zahlen zwischen 0 und 1) im Gegenuhrzeigersinn wachsend, d.h.die Minor wächst in Relation zur Maior.

Für Freunde der analytischen Geometrie (die dem damaligen Denken fremd war) denken wir uns das Lambdoma (als unendlich großes gleichschenkliges Dreieck, gleichsam zwei Schenkel ohne Basis) aus gleichschenkligen Dreiecken in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingepasst: die Spitze (1) sei (0 I 0), der horizontale Abstand zwischen 1/2 und 1/1 soll die Länge 1 haben (und ebenso alle weiteren Abstände zwischen horizontalen Nachbarn), der Spitzenwinkel sei α, so ergibt sich der Zeilenabstand c als $\mathbf{c := ctg(\alpha /2) / 2}$.

Ω

1

1/2 2/2

1/3 2/3 3/3

1/4 2/4 3/4 4/4

u.s.w

Im Falle gleichseitiger Dreiecke ist c = ctg(30°) / 2 = √3/2. Im Falle eines rechten Winkels an der Spitze ist hat der ctg den Wert 1, das Lot hat die Länge c=½.

k/n liegt auf der Koordinate ***((2k-n-1)/2 I (1-n)* c)***

Alle k/n gleichen Wertes p/q *(p und q teilerfremd)* ***liegen auf einer Geraden der Richtung ((2p-q)/2 ; -q*c) durch den Pkt Ω = (-1/2 ; c)****, „wo der Sitz des Allmächtigen anzunehmen ist“ (copyright Ernst Bindel), denn alle Werte treffen sich in ihm. Die Parameterdarstellung der Geraden lautet infolgedessen*

$$f_{p/q}(t) = (-1/2\ ;\ c),\ +\ t*((2p-q)/2\ ;\ -q*c)$$

Auf Senkrechten durch das Lambdoma wachsen die Nenner doppelt so schnell wie die Zähler, also beispielsweise 2/5 3/7 4/9 5/11… Senkrecht unter 1= 1/1 liegen die Werte r/(2r-1) für alle Natürlichen Zahlen r. Sie liegen um das Intervall (r/2r)/(r/(2r-1)) = (2r-1)/2r über dem Grundton. Mit wachsendem r nähert sich dieses Intervall immer mehr dem Einklang.

Das Lambdoma macht auch anschaulich, was Cantor und seine Mitstreiter beschäftigt hat: Zwar liegen die Rationalen Zahlen dicht, das heißt, zwischen zwei verschiedenen Rationalen Zahlen, mögen sie auch noch so eng benachbart sein, liegt immer eine weitere Rationale Zahl (und damit sogar unendlich viele). Dennoch gibt es „weit mehr“ Irrationale Zahlen, also Reelle Zahlen, die sich nicht als Quotient einer kleineren und einer größeren Natürlichen Zahl darstellen lassen. Wir haben gesehen, dass jede Rationale Zahl p/q anschaulich wird in einer Geraden durch Ω und unendlich viele Lambdomapunkte rp/rq mit natürlichen Zahlen r. Cantor hat gezeigt, dass die „weitaus meisten“ Geraden des Geradenbündels durch Ω im Winkel α, dass also die „weitaus meisten“ dieser Geraden durch das Lambdoma verlaufen, ohne auf einen Punkt p/q zu treffen. Wir sehen das neuerlich als fruchtbaren Ansatzpunkt für mathematisch interessierte Esoteriker. Die meisten dieser von Ω ausgehenden Strahlen durchlaufen das Lambdoma bis in unendliche Fernen, ohne jemals auf einen Lambdomapunkt zu stoßen.

Insbesondere gilt dies für den Tritonus, diesen „diabolus in musica“. Seine Gerade hat die Eigenschaft, dass k/n genau dann links von der Tritonusgeraden verläuft, wenn $k^2/n^2 < ½$, genau dann wenn $2k^2 < n^2$.

Die wunderschöne „Bartok-Quart“ 8/11 liegt rechts des Tritonus , da $(8/11)^2 = 64/121 > 1/2$

Dass die reine Durterz kleiner ist als die temperierte Durterz erkennt man daran, dass 4/5 zur dritten Potenz 64/125 ergibt, also liegt 4/5 rechts von der (irrationalen) Geraden eins durch dritte Wurzel von 2. Überhaupt treffen sämtliche Intervalle eines perfekt gleichschwebend temperierten Klavieres mit Ausnahme der Oktaven und der Prim niemals auf einen Lambdoma-Punkt.

Wir kommen nochmals in der Sprache heutiger Mathematik auf den Oktavraum zu sprechen: dieser liegt im Raum rechts von der Oktavgeraden (der Senkrechten durch Ω). Da wir Töne im Abstand von Oktaven so sehr als gleiche Töne hören, dass wir sie in der Musiktheorie gleich benennen, interessieren wir uns besonders für die Intervalle innerhalb des Oktavraums. Größere Intervalle „projizieren wir in einen Oktavraum“, indem wir etwa die Duodezime mit der

Quinte „identifizieren“ und die kleine None mit dem Halbton. Dem entspricht eine Einteilung der Intervalle in „multiplikative Restklassen“ aufgrund der Relation: k/n sei kongruent k‘/n‘ genau dann wenn kn‘/k’n eine Zweierpotenz ist. Man verifiziert leicht, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und somit eine Klasseneinteilung aller Intervalle bewirkt. Jede Klasse hat genau einen Vertreter innerhalb des Oktavraumes. Die Superposition von zwei Klassen definieren wir als Klasse der Superposition (=Multiplikation) zweier beliebiger Vertreter, da man leicht einsieht, dass das Resultat von der Wahl der Vertreter unabhängig ist.

Abschließend ein Wort zur Verbindung von Lambdoma und rechtwinkligen Darstellungen oder gar Matrizen. Zu ihnen gelangt man, wenn man unseren heutigen Begriff der Rationalen Zahlen verwendet, der – um es nochmals zu betonen – den Pythagoreern fremd war. Proportion und Intervall basieren auf einer kürzeren und einer längeren Saite, auf dem Verhältnis ihrer Längen.

Nach unserem Begriff der Rationalen Zahlen sind diese Quotient aus einer Ganzen Zahl und einer Natürlichen Zahl. Ordnen wir diese als x/y in einem zweidimensionalen Koordinatengitter an, erhalten wir

--3/7	-2/7	-1/7	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1…
-1/2	-1/3	-1/6	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1	7/6…
-3/5	-2/5	-1/5	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1	6/5	7/5…
-3/4	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4
-1	-2/3	-1/3	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	7/3
-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
			Ω							

Man erkennt rechts oberhalb von Ω die Spitze des (umgedrehten) Lambdomas, die Vertikale ist der eine Schenkel (bei uns der Linke), die Diagonale ist der rechte Schenkel. Die Spiegelung an dieser Diagonalen führt zu den Kehrwerten, die alle keine echten Brüche mehr sind. Diese erhalten dann eine klingende Entsprechung, wenn man die Intervalle nicht als Klang wahrnimmt sondern als Tonschritt. Dann entspricht der Spiegelung an der Diagonalen die melodische Umkehrung. Die im Lambdoma vorhandenen Proportionsgeraden durch Ω sind auch hier zu finden und werden mit gespiegelt.

Die Vertikale über Ω ist die Spiegelungsachse, die jeder positiven Rationalen Zahl ihr negatives Pendant zuordnet. Hiezu finde ich keine akustische Entsprechung. Dies alles jedoch geht über die Mathematik der Pythagoreer hinaus.

Appendix: Jenseits des Lambdoma

Das Lambdoma hat uns eine wunderbare Illustration der Proportionen und ihrer Einbettung in das links offene Intervall der reellen Zahlen zwischen (exklusive) Null und (inklusive) Eins geliefert. Aufgrund der Wellengleichung haben wir erkannt, wie die echten Brüche p/q (Saitenteilungen mit p<q) den Frequenzverhältnissen q/p entsprechen. Kehrwerte bezeichnen die gleiche Proportion.

Betrachte den Punkt auf dem Einheitskreis, an welchem die Tangente zu q/p senkrecht über p/q liegt. Die lineare Ordnung der Verhältnisse bleibt auf dem Kreis erhalten, die Intervalle wachsen auf dem Einheitskreisviertel im Gegenuhrzeigersinn, beginnend mit der Prim in drei Uhr. Der Oktavraum befindet sich auf dem ersten Viertelkreis zwischen drei Uhr und ein Uhr (auf dem Zifferblatt).

Völlig anders als im Lambdoma sehen wir die Intervalle nun als Punkte auf dem Viertelkreis des Zifferblattes von drei Uhr (inklusive) bis zwölf Uhr (exklusive), von p/q auf dem Intervall]0,1] durch das Lot nach oben erreichbar, von q/p auf der Zahlengeraden durch die Tangente an den Einheitskreis. Wir können nicht mehr erkennen, ob die Verhältnisse rational oder irrational sind. Der Oktavraum entspricht dem Zifferblatt zwischen drei Uhr und ein Uhr, denn „um ein Uhr" messen die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ½ und √3/2, dh.der Winkel zwischen Radius und x-Achse beträgt π/3. Jedem Intervall entspricht ein Punkt auf dem Viertelkreis bzw.ein Winkel zwischen null inklusive und π/2 exklusive. Die Winkel zwischen null und π/3 entsprechen dem Oktavraum, der Tritonus beispielsweise entspricht π/4, denn im gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke mit Hypotenuse 1 messen die Katheten 1/√2.

Weder im Lambdoma noch auf diesem Viertel des Einheitskreises gelingt es uns, die Superposition von Intervallen anschaulich zu machen.

Dies gelingt erst, wenn wir die Intervallzahlen, also im Wesentlichen die logarithmierten Schwingungsverhältnisse auf den Einheitskreis aufwickeln. Dies ist durchgeführt im „Versuch, die Superposition von Intervallen im Oktavraum zu veranschaulichen in der Gauss'schen Ebene".