§ 0 Mathematisches Glossar

Wir akzeptieren den Begriff der Menge und schreiben $a \in M$ für: das Element a liegt in der Menge M. Als Standard vorausgesetzt sind die Mengen

N = { 1, 2, 3, …} , die Menge der Natürlichen Zahlen

Z = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …} , die Menge der Ganzen Zahlen

Q = Menge der Rationalen Zahlen p/q (Brüche) mit $p \in$ **Z** und $q \in$ **N**

R = Menge der Reellen Zahlen

sowie die Prädikate

$\forall a \in M$: „für alle Elemente a der Menge M gilt“

$\exists b \in M$: „die Menge M enthält (mindestens) ein Element b mit der Eigenschaft“

Aus der Aussagenlogik verwenden wir

$\neg$ … „es ist nicht so, dass…“

… $\wedge$ … „ sowohl…als auch…“

… $\vee$ … „… oder … „ (schwaches oder, d.h. es verhält sich nicht so, dass weder… noch ….)

Prämisse $\rightarrow$ Folgesatz, d.h. Folgesatz $\vee$ ($\neg$ Prämisse)

Entsprechend verwenden wir die Verknüpfungen von Mengen (Vereinigung $\cup$, Schnittmenge $\cap$ und Inklusion $\subset$

Als ***Kartesisches Produkt*** der Mengen A und B bezeichnen wir die Menge der Paare

$A \times B = \{(a, b);\ a \in A \wedge b \in B\}$

Eine ***zweistellige Relation*** auf der Menge M ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Dabei meint $(a, b) \in R$, dass a mit b in Relation steht. Eine zweistellige Relation R ist genau dann eine ***Äquivalenzrelation***, wenn sie die Bedingungen A1 bis A3 erfüllt:

A1: $(\forall a \in M)\ (a,a) \in R$

A2: $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$

A3: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

Eine Aequivalenzrelation R auf der Menge M definiert eine Unterteilung der Menge M in Klassen einander aequivalenter Elemente. Diese Klassen sind paarweise disjunkt (Schnittmenge leer) und schöpfen die Menge aus. Umgekehrt definiert jede Unterteilung der Menge M in paarweise disjunkte Klassen eine Aequivalenzrelation (zwei Elemente sind genau dann „äquivalent“ wenn sie der gleichen Klasse angehören).

Eine Relation R auf der Menge M ist genau dann eine ***Totale Ordnung***, wenn sie die Bedingungen O1 bis O3 erfüllt:

O1: $(\forall a \in M) \neg (a,a) \in R$ (oder damit gleichbedeutend: $(a,b) \in R \rightarrow a \neq b$)

O2 Wenn $a \neq b$, dann gilt $(a,b) \in R$ genau dann, wenn $\neg (b,a) \in R$

O3 wie A3: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$

Eine ***Abbildung*** der Menge P auf die Menge Q ist eine Teilmenge A des kartesischen Produktes P **x** Q mit den beiden Eigenschaften, dass erstens $(\forall p \in P)(\exists r \in Q)$ mit $(p,r) \in A$ und zweitens: aus $(p,r) \in A$ & $(p,s) \in A$ folgt r=s. Die Abbildung A heißt ***injektiv***, wenn aus $(s,q) \in A$ und $(r,q) \in A$ folgt s=r. Die Abbildung A heißt ***surjektiv***, wenn $(\forall q \in Q)$ $(\exists p \in P)$ $(p,q) \in A$. Die Abbildung A heißt ***bijektiv***, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge M auf die Menge M selbst bildet eine Gruppe bezüglich des „Hintereinanderschaltens". Wir bezeichnen sie als M^M, das ist die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen der Menge M. Das Neutrale Element ist die „Identität".

§ 1 Die Abel'sche Gruppe der Intervalle

Es seien

T eine Menge mit wenigstens zwei verschiedenen Elementen (wir denken an Töne) und

< eine Totale Ordnung auf T

Dies bedeutet: Setzen wir $S_- := \{(u, v) \in T\mathbf{x}T;\ v < u\}$ und $S_+ := \{(u, v) \in T\mathbf{x}T;\ u < v\}$ und $S_0 := \{(t, t);\ t \in T\}$, so gilt $S_- \cup S_0 \cup S_+ = T\mathbf{x}T$ und $S_- \cap S_0 = S_0 \cap S_+ = S_+ \cap S_- = \emptyset$ (leere Menge)

Ferner sei A eine Aequivalenzrelation auf T**x**T (also eine Teilmenge von (T**x**T) **x** (T**x**T)). Wir verwenden für A das Zeichen ~ , dh.statt $((a,b), (c,d)) \in A$ schreiben wir $(a,b)\sim(c,d)$. Wir setzen für die Relation ~ drei Verträglichkeitsaxiome mit der totalen Ordnung < voraus, nämlich:

V1: Jede ~-klasse hat mit jeder der drei Mengen S_-, S_0, S_+ entweder leeren Durchschnitt oder ist in ihr enthalten.

V2: $(a, b)\sim(c, d) \rightarrow (a, c)\sim(b, d)$

Bemerkung: Die Folgerung gilt klarerweise auch in der umgekehrten Richtung.

V3: $(\forall u, v, w \in T)(\exists x \in T)$ $(u, v)\sim(w, x)$

Bemerkung: Aus V1 und V2 folgt, dass ein solches x eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung: Aus V3 folgt, dass die Ordnung „randlos" ist, die Menge T ist unendlich.

Beispiel: Auf der Menge der ganzen Zahlen **Z** sei < die vertraute Ordnungsrelation. Nun definiere man $(a,b)\sim((c,d)$ genau dann, wenn b-a = d-c.

Nun setzen wir

$$\mathbf{J} := \{j \in T^T;\ (\forall\ s \in T)(\forall\ t \in T)\ (j(s), j(t)) \sim (s,t)\}$$

Für alle $j \in \mathbf{J}$ gilt: aus $s<t$ folgt aufgrund von V1, dass $j(s)<j(t)$. Deshalb ist j injektiv und wegen V3 auch surjektiv.

Für alle $j \in \mathbf{J}$ und $k \in \mathbf{J}$ ist auch $j\ \mathbf{o}\ k \in \mathbf{J}$ wobei $j\ \mathbf{o}\ k\ (t) = k(j(t))$. Bezüglich der Operation **o** bildet **J** eine Untergruppe der Gruppe von T . Das neutrale Element bezeichnen wir als die **Prim**. Die Gruppe ist kommutativ, denn $(\forall\ t \in T)\ \ (j(t),t) \sim (k(j(t)),k(t))$, also wegen V2 $(j(t),k(j(t)) \sim (t,k(t))$, was per definitionem $\sim (j(t), j(k(t))$. Aus $(j(t), k(j(t))) \sim (j(t), j(k(t)))$ wiederum wegen V2 $(j(t),j(t)) \sim (k(j(t)), j(k(t)))$. Somit $(\forall t \in T)\ (t,t) \sim (j\mathbf{o}k(t),k\mathbf{o}j(t))$, also $(t, j\mathbf{o}k(t)\ ) \sim (t,k\mathbf{o}j(t))$, woraus sich $j\mathbf{o}k = k\mathbf{o}j$ ergibt.

Jedem $j \in \mathbf{J}$ wird durch $\{(t, j(t)); t \in T\}$ eine $\sim$Aequivalenzklasse von Tonpaaren (Elementen aus T**x**T) zugeordnet. Diese Zuordnung ist bijektiv. Die Elemente von **J** (respektive die $\sim$Aequivalenzklassen) nennen wir ***Intervalle***. Sie bilden eine Abel'sche Gruppe.

Bemerkung: Die Summe (Resultat der Gruppenoperation) zweier Intervalle wird durch die zum Tonpaar (u,w) gehörige Aequivalenzklasse vertreten, wenn das Tonpaar (u,v) die eine und das Tonpaar (v,w) die andere Äquivalenzklasse vertritt.

§ 2 Beispiele (Modelle)

2.1 Sei T die Menge aller Töne. Für $a \in T$ und $b \in T$ sei $a<b$, wenn der Ton a tiefer ist als der Ton b. Für die Töne u, v, w, x sei $(u,v)\sim(w,x)$ genau dann, wenn das gehörte Intervall (im musikalischen Sinn verstanden) u-v gleich groß empfunden wird wie das Intervall w-x. Die musikalischen Intervalle sind hier als Tonschritte gemeint, die fallende Quinte wird unterschieden von der steigenden Quinte. Es entsprechen dann die Ordnungsaxiome O1 bis O3 dem gehörsmäßig Gewohnten. Ferner ist die Abstandsgleichheit von vorneherein als Aequivalenzrelation definiert. V1 besagt, dass zwei gleichgroße (melodische) Intervalle (Melodieschritte) entweder beide steigend, beide fallend oder beide die Prim sind. Laut V2 sind die beiden Ausgangstöne und die beiden Endtöne zweier äquivalenter Intervalle jeweils im gleichen Abstand voneinander (mit Richtung, melodisch empfunden). V3 fordert, dass sich ein gegebenes Intervall auf jede Stufe transponieren lasse. Die Gruppenoperation ist musikalisch ausgedrückt die Superposition der Intervallschritte, dass sie kommutativ ist, folgt aus den drei Axiomen.

2.2 Sei T die Menge aller positiven Rationalen Zahlen und * die Multiplikation. Ferner sei < die übliche Ordnung nach ihrer Größe. Sei $(w,x)\sim(y,z)$ genau dann, wenn $w*z = x*y$. Die Eigenschaften A1 bis A3 sind leicht nachzuprüfen, beispielsweise folgt aus $(u,v)\sim(w,x)$ und $(w,x)\sim(y,z)$, dass $ux=vw$ und $wz=xy$, also $uxy=uwz=vwy$, also $uz=vy$. Die Axiome V1, V2 folgen direkt aus den Regeln für das Rechnen mit Rationalen Zahlen; in V3 ermitteln wir zu u, v, w das $x:= v*w/u$. Die Menge $\mathbf{J} = \{ j \in T^T; (\forall s \in T)(\forall t \in t)\ s*j(t) = j(s)*t\}$. Somit entspricht jedem $j \in \mathbf{J}$ die positive Rationale Zahl $j(t) / t$, deren Wert ja für alle $t \in T$ der Gleiche ist. Für beliebiges $s \in T$ ist dann $j(s)$ das Produkt von s mit diesem Wert. Umgekehrt definiert jede positive Rationale Zahl u durch $k(t):= u*t$ ein Element $k \in \mathbf{J}$. Die Intervalle $k \in \mathbf{J}$ sind gruppenisomorph der Multiplikativen Gruppe der positiven Rationalen Zahlen. Dies ist die aus der Akustik (schon Pythagoras und seiner Schule) bekannte Entsprechung zwischen Intervallen und Schwingungsverhältnissen.

2.3. Sei T eine der Standardzahlenmengen **Z**, **Q** oder **R**. Die Ordnungsrelation < sei wiederum die gewohnte Ordnung nach der Größe. Sei (u,v)~(w,x) genau dann, wenn u+x = v+w. Wieder verifiziert man leicht die Eigenschaften A1 bis A3, letztere, indem man von u+x=v+w und w+z=x+y ausgeht und über u+x+z = v+w+z = v+x+y die Gleichung u+z = v+y erhält. Auch weiter verlaufen alle Überlegungen analog zum Beispiel 2.2, Resultat ist, dass die Additive Gruppe der Ganzen, der Rationalen bzw.der Reellen Zahlen zur Gruppe der Intervalle isomorph ist.

2.4. Sei T≔ **Z x Z** . Die Ordnungsrelation sei (a,b)<(c,d) dann und nur dann, wenn (a<c) **v** (a=c **∧** b<d). Die Aequivalenzrelation ~ definieren wir: ((a,b),(c,d)) ~ ((u,v),(w,x)) dann und nur dann, wenn a+w=c+u und b+x=d+v. Die Verifikation der Eigenschaften O1 bis O3, A1 bis A3 und V1 bis V3 bietet keine Probleme. Für V3 wählen wir zu (a,b), (c,d), (u,v) das Paar (w,x) ≔ (c+u-a, d+v-b). Die Intervalle sind jene Abbildungen (j(u,v) ,k(u,v)), für welche aus (u,v)~(w,x) folgt

j(u,v)-u = j(w,x)-w und k(u,v)-v = k(w,x)-x

also muss j(a,b) konstant in b sein und k(a,b) konstant in a. Es gilt sogar für ein beliebig gewähltes Paar (a,b)

j(x,y) = x + (j(a,b)-a) und k(x,y) = y + k(a,b)-b.

Umgekehrt entspricht jedem Zahlpaar (r,s) ϵ T durch (j(x,y), k(x,y)) ≔(x+r, y+s) ein Intervall. Dies ist wieder ein Gruppenisomorphismus zwischen den Intervallen und der komponentenweise additiven Gruppe **Z x Z** .

§ 3 Rechnen mit Intervallen

Wir betrachten die Abel'sche Gruppe **J** wie üblich als **Z**-Modul und schreiben

0 ×j = **Prim**

1×j = j und für beliebige n ϵ **N**

(n+1)×j = j **o** (n×j)

(-n)×j = (n×j)

Durch vollständige Induktion kann man aus Obigem für alle n,m ϵ **Z** und j, k ϵ **J** zeigen:

(n+m)×j = (n×j) **o** (m×j)

(n*m)×j = n×(m×j) (* steht für die Multiplikation innerhalb **Z**, × für die Modulwirkung von **Z** auf **J**)

n×(j **o** k) = (n×j) **o** (n×k)

Um auf **J** eine Ordnung einzuführen, bemerken wir, dass für j, k ϵ **J** gilt

(∃ t ϵ T) j(t)<k(t) → (∀ t ϵ T) j(t)<k(t)

(∃ t ϵ T) j(t)=k(t) → (∀ t ϵ T) j(t)=k(t)

(∃ t ϵ T) k(t)<j(t) → (∀ t ϵ T) k(t)<j(t)

Das heißt, unabhängig von der Wahl eines beliebigen $t_0 \in T$ können wir j, k $\in$ **J** definieren

$J \ll k$ dann und nur dann, wenn $j(t_0) < k(t_0)$.

und gewinnen so eine Totale Ordnung auf **J**. Setzen wir

$\mathbf{J}_+ := \{j \in \mathbf{J};\ \text{Prim} \ll j\}$

$\mathbf{J}_- := \{j \in \mathbf{J};\ j \ll \text{Prim}\}$,

wird $\mathbf{J} = \mathbf{J}_- \cup \mathbf{J}_+ \cup \{\text{Prim}\}$

Ohne Beweise notieren wir folgende Regeln, die für alle h, j, k $\in$ **J** und r $\in$ **Z** gelten

i) $j \ll k \rightarrow h \mathbf{o} j \ll h \mathbf{o} k$

ii) $j \ll k$ dann und nur dann, wenn $\neg (k \ll j)$

iii) $\text{Prim} \ll j$ dann und nur dann, wenn $r \times j \ll (r+1) \times j$

$j \ll \text{Prim}$ dann und nur dann, wenn $(r+1) \times j \ll r \times j$

also auch allgemeiner mit $r<s \in \mathbf{Z}$

$\text{Prim} \ll j$ dann und nur dann, wenn $r \times j \ll s \times j$

$j \ll \text{Prim}$ dann und nur dann, wenn $s \times j \ll r \times j$

iv) $\text{Prim} \ll j$ dann und nur dann, wenn $(\forall\ n \in \mathbf{N})\ \text{Prim} \ll n \times j$

$J \ll \text{Prim}$ dann und nur dann, wenn $(\forall\ n \in \mathbf{N})\ n \times j \ll \text{Prim}$

Das bedeutet: **J** hat keine Torsionselemente. Allgemeiner formuliert:

$J \ll k$ dann und nur dann, wenn $(\forall n \in \mathbf{N})\ n \times j \ll n \times k$

LEMMA: Seien q, s $\in$ **N** und p, r $\in$ **Z**. Ferner seien j,k $\in$ **J**. Sei h $\in$ **J** und $q \times j = p \times h$ und $s \times k = r \times h$. Dann behaupten wir: $j \ll k$ dann und nur dann, wenn $p/q < r/s$.

BEWEIS: laut Voraussetzung gilt $q*s \times j = s*p \times h$ und $q*s \times k = q*r \times h$. (Wir erinnern an obige Bemerkung, dass beispielsweise $q*r \times h = (q*r) \times h = q \times (r \times h) = q \times r \times h$, deswegen verzichten wir auf Klammern und könnten auch die Multiplikation innerhalb von **Z** mit dem gleichen Zeichen schreiben wie die Modulwirkung von **Z** auf **J**)

Also $j \ll k \rightarrow q*s \times j \ll q*s \times k$

$\rightarrow s*p \times h \ll q*r \times h$

$\rightarrow s*p < q*r \rightarrow p/q < r/s$

§ 4 Intervalle und Reelle Zahlen

Für das Weitere brauchen wir eine zusätzliche Voraussetzung, der wir uns über zwei vorläufige Formulierungen annähern werden:

V4‘ $(\forall j \in \mathbf{J}_+)(\forall k \in \mathbf{J}_+)(\exists n \in \mathbf{Z})\ n \geq 0$ und $k \ll (n+1)\times j$

Für jedes $n' > n$ folgt $k \ll (n'+1)\times j$. Wählt man die kleinstmögliche Zahl n, folgt die schärfere Formulierung

V4‘‘ $(\forall j \in \mathbf{J}_+)(\forall k \in \mathbf{J}_+)(\exists n \in \mathbf{Z})\ n \geq 0$ und $n\times j \underline{\ll} k \ll (n+1)\times j$

Wir können für k alle Intervalle (auch negative) zulassen, denn

$k = \mathrm{Prim} \rightarrow 0\times j = k \ll 1\times j$

$k \ll \mathrm{Prim} \rightarrow (\exists n \in \mathbf{Z})\ n \geq 0 \quad n\times j \underline{\ll} -k \ll (n+1)\times j \rightarrow -(n+1)\times j \ll k \underline{\ll} (-n)\times j$

Falls $k = (-n)\times j$ sein sollte, ersetzen wir n durch n-1, andernfalls gelangen wir direkt zu

V4 $(\forall j \in \mathbf{J}_+)(\forall k \in \mathbf{J})(\exists n \in \mathbf{Z})\quad n\times j \underline{\ll} k \ll (n+1)\times j$

Dieses Axiom wird etwa „Axiom des Messens“ oder „Archimedisches Axiom“ genannt. Die Beispiele 2.1 bis 2.3 in §2 genügen diesem Axiom. Beispiel 2.4 jedoch nicht, denn beispielsweise ist

$(\forall n \in \mathbf{Z})\quad (n+1)\times(0,1) \ll (1,0)$

Wir setzen nun die vier Axiome V1 bis V4 voraus und werden die Intervalle gruppenhomomorph abbilden in die additive Gruppe der Reellen Zahlen („einbetten“), wobei wir die Wahl eines Maßstabes frei haben. Sei deshalb $m \in \mathbf{J}_+$ ein willkürlich gewähltes ausgezeichnetes Intervall. Wir nennen es ***Oktave*.** Bezeichne (m) die von m erzeugte Untergruppe in **J**. Dann nennen wir die Faktorgruppe **J**/(m) den Oktavraum.

Reelle Zahlen werden entweder als Grenzwerte von Cauchyfolgen Rationaler Zahlen (z.B.Dezimalbruch, Kettenbruchdarstellung u.ä.) dargestellt oder als kleinste obere Schranke (supremum) von Dedekindschnitten. Beides lässt sich auf die Intervalle übertragen. Wir wählen das Verfahren mit Dedekindschnitten.

Sei in beliebiges Intervall $j \in \mathbf{J}$ gegeben. ($m \in \mathbf{J}_+$ ist der einmal fix gewählte Maßstab namens Oktave.) Dann ist durch

$D(j) \coloneqq \{p/q \in \mathbf{Q};\ p \in \mathbf{Z} \wedge q \in \mathbf{N} \wedge p\times m \underline{\ll} q\times j\ \}$

ein Schnitt auf **Q** definiert. Denn laut V4 $(\forall q \in \mathbf{N})(\exists n \in \mathbf{Z})$ so, dass $n\times m \underline{\ll} q\times k \ll (n+1)\times m$. D(j) ist also nicht leer, D(j) ist nach oben beschränkt, denn $(\exists n \in \mathbf{Z})\ n\times m \underline{\ll} k \ll (n+1)\times m$, also ist n+1 eine obere Schranke. Ist ferner $p/q \in D(j)$ und $r/s < p/q$, so ist $rq\times m \underline{\ll} sp\times m \underline{\ll} sq\times j$, also $r/s \in D(j)$.

Somit ist durch $d(j) \coloneqq \sup D(j)$ eine Abbildung $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{R}$; $j \rightarrow d(j)$ gegeben. (sup steht für Supremum, i.e.die kleinste obere Schranke der Zahlenmenge D(j)). Folgende Eigenschaften sind zu zeigen:

i) $j \ll k \rightarrow d(j) \leq d(k)$

ii) $d(\mathbf{Prim}) = 0$ und $d(m) = 1$

iii) $d(j \mathbf{o} k) = d(j) + d(k)$

iv) $d(j) = 0 \rightarrow j = \mathbf{Prim}$

v) $d(j^{-1}) = -d(j)$

vi) $d(j) = d(k) \rightarrow j=k$

Wir zeigen diese Eigenschaften mit folgenden Überlegungen:

i) sei $p/q \in D(j)$, also $p \times m \lll q \times j \lll q \times k$, also $p/q \in D(k)$, also $d(j) \leq d(k)$

ii) folgt unmittelbar aus der Definintion von D(**Prim**) bzw. D(m).

INSERT

Daraus ergibt sich als Zusammenfassung dieser Gedanken der

HAUPTSATZ: Ist T eine Menge mit wenigstens zwei verschiedenen Elementen, ist weiters < eine Totale Ordnung auf T und ist ferner ~ eine Aequivalenzrelation auf T**x**T, die den Verträglichkeitsaxiomen V1 bis V4 genügt, so vermittelt für ein beliebig gewähltes $m \in \mathbf{J}_+$ die Abbildung $d(j) \coloneqq \sup\{p/q \in \mathbf{Q};\ p \in \mathbf{Z} \wedge q \in \mathbf{N} \wedge p \times m \lll q \times j\}$ eine ordnungstreue, gruppenisomorphe Abbildung der Intervalle auf eine Untergruppe der additiven Gruppe der Reellen Zahlen.

Anmerkung: Wie „groß“ diese Untergruppe der Reellen Zahlen ist, ergibt sich nicht aus den Axiomen. Bereits die additive Gruppe der Ganzen Zahlen ist ein Modell dieser Theorie.

KOROLLAR: $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Q};\ j \rightarrow 2^{d(j)}$ vermittelt eine ordnungstreue, gruppenisomorphe Abbildung der Intervalle auf eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven Reellen Zahlen. Wir nennen d(j) in ***Intervallzahl*** des Intervalls j und wir nennen $2^{d(j)}$ das ***Frequenzverhältnis*** des Intervalls j.

Anmerkung: Statt der Intervallzahl sind als Maß für die Größe eines Intervalls auch andere Einheiten wie „Cent“oder „Millioktave“ üblich, die man erhält, wenn man als Intervall m (Maßstab $m \in \mathbf{J}_+$ nach freier Wahl) nicht die (musikalische) Oktave wählt sondern ihren 1200sten Teil oder ihren tausendsten Teil.

§5 Kettenbruchdarstellung

Die Intervallzahl d(j) wurde als Supremum eines Dedekind’schen Schnittes eingeführt. Wir geben zur praktischen genauen oder approximativen Ermittlung ein Verfahren an, das der Kettenbruchdarstelllung Reeller Zahlen nachgebildet ist. Dieser Abschnitt illustriert lediglich das Rechnen in **J**, denn aufgrund der isomorphen Einbettung von **J** in **R** kann das Folgende auch direkt in **R** in der Weise stattfinden, wie es aus der Theorie der Kettenbrüche bekannt ist.

Wir gehen dabei aus von einem festen m ϵ **J** (Oktave) und ordnen jedem j ϵ **J** eine (möglicherweise abbrechende) Folge ganzer Zahlen zu, die bis auf die erste alle größer als null sind. Wir setzen

$j_{-2} \coloneqq j$ und $j_{-1} \coloneqq m$.

$(\forall\ r \in \mathbf{N_0})(\exists\ n(r) \in \mathbf{Z})\qquad n(r)\times j \underline{\ll}\ j \ll (n(r)+1)\times j$ denn stets ist $j_{r-1} \in \mathbf{J_+}$; wir setzen

$j_r \coloneqq j_{r-2}\ \mathbf{o}((-n(r))\ \mathbf{o}\ j_{r-1}$

Falls es eine Zahl r gibt mit j_r = **Prim**, bricht das Verahren ab. In diesem Fall wird dem Intervall j die endliche Folge < n(0),…, n(r) > zugeordnet. Andernfalls lassen sich beliebig viele Glieder der j zugeordneten Folge < n(0), n(1),…> emitteln.

Solange für ∀ r ϵ $\mathbf{N_0}$ das Intervall j(r) nicht die **Prim** ist, gilt

$j_{r-2} \ll (n(r)+1)\times j_{r-1}$ und somit

$j_r = j_{r-2}\ \mathbf{o}\ (-n(r))\times j_{r-1} \ll j_{r-1}$, daraus folgt

$\mathbf{Prim} \ll j_r \ll j_{r-1}$ und $n(r+1) > 0$

Wir setzen

$p(-2) \coloneqq o;\qquad p(-1) \coloneqq 1\qquad q(-2) \coloneqq 1\qquad q(-1) \coloneqq 0$

und für alle r ϵ **N** , solange j(r) nicht gleich **Prim**,

$p(r) \coloneqq n(r)*p(r-1) + p(r-2)$ und $q(r) \coloneqq n(r)*q(r-1) + q(r-2)$

Dadurch wird

$j_{-2} = (q(-2)\times j)\ \mathbf{o}\ ((-p(-2))\times m)$

$j_{-1} = -\ ((q(-1)\times j)\ \mathbf{o}\ ((-p(-1))\times m)$

und für r ϵ $\mathbf{N_0}$ folgt aus

$j_{r-1} = (-1)^{r-1}\ ((q(r-1)\times j)\ \mathbf{o}\ ((-p(r-1))\times m)$

definitionsgemäß $j_r = j_{r-2}\ \mathbf{o}\ ((-n(r))\times j_{r-1})$

$= (-1)^r\ (\ (q(r-2)\times j\ \mathbf{o}\ (-p(r-2))\times m)\ \mathbf{o}\ ((-n(r))(-1)\times(q(r-1))\times j\ \mathbf{o}\ ((-p(r-1))\times m)))$

$= (-1)^r\ (\ (\ (n(r)q(r-1) + q(r-2))\times j)\ \mathbf{o}\ (-(n(r)p(r-1)))+p(r-2))\times m))$

Also $j_r = (-1)^r\ (q(r)\times j\ \mathbf{o}\ (-p(r))\times m)$, oder auch gleichbedeutend

$q(r)\times j = p(r)\times m\ \mathbf{o}\ ((-1)^r \times j_r)$. Daraus folgt das

LEMMA: Wenn das Verfahren bei einer Zahl r ϵ $\mathbf{N_0}$ abbricht → d(j) = p(r) / q(r)

KOROLLAR d(j) = <n(0),…,n(r)>

Ferner folgt aus $q(r)\times j = p(r)\times m\ \mathbf{o}\ ((-1)^r \times j_r)$ unmittelbar

$$p(2r)\times m \underline{\ll} q(2r)\times j \qquad \text{und} \qquad q(2r+1)\times j \underline{\ll} p(2r+1)\times m$$

für alle nicht negativen r solange j_{2r} bzw. j_{2r+1} nicht die Prim ist.

KOROLLAR: $p(2r) / q(2r) \leq d(j) \leq p(2r+1) / q(2r+1)$

KOROLLAR ($\forall\, j \in \mathbf{J}$) $d(j) = \langle n(0), n(1), \ldots \rangle$ (die rechte Seite aufgefasst als endlicher (im Falle des abbrechenden Verfahrens) bzw.als unendlicher (falls Verfahren nicht abbricht) Kettenbruch)

Bei der Zuordnung $j \rightarrow d(j)$ entspricht der von m erzeugten Untergruppe in **J** die additive Gruppe der Ganzen Zahlen. Der Oktavraum wird in **R** / **Z** abgebildet, wobei die zu $d(j) = \langle n(0), n(1), \ldots \rangle$ gehörige Restklasse aus den Intervallen $\langle x, n(1), n(2), \ldots \rangle$ besteht, wobei x die ganzen Zahlen **Z** durchläuft.

Wie lange muss man rechnen (i.e.wie groß muss man den Index r wählen), damit $p(r) / q(r)$ eine „akzeptable" Näherung an $d(j)$ darstellt?

Aus der Theorie der Kettenbrüche verwenden wir $d(j) - p(r)/q(r) \leq 1 / q(r)q((r+1)$ und bemerken, dass laut ihrer Definition die $q(r)$ mit r nicht langsamer wachsen als die Fibonacci-Zahlen. Daraus schließen wir

$$d(j) - p(2)/q(2) \leq 0.025$$

$$p(3)/q(3) - d(j) \leq 0.0096$$

$$d(j) - p(4)/q(4) \leq 1/13*21 \leq 0.0037$$

$$p(5)/q(5) - d(j) \leq 1 / 21*34 \leq 0.0014$$

Genauigkeitsbetrachtungen dieser Art finden sich im Artikel „Theorie der Töne und Tonsysteme"